

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ С СОБСТВЕННЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ¹

Аннотация. Проводится исследование условий для собственных (неупругих) деформаций, не вызывающих механических напряжений. В рамках задачи теории упругости отсутствие напряжений возможно, если собственные деформации являются совместными, а соответствующие им перемещения обращаются в нуль на опорах. Данные условия адаптируются к решению задачи об определении напряженно-деформированного состояния в плоском изотропном диске, изготовленном из материала с эффектом памяти формы. В качестве собственных деформаций в данной задаче рассматриваются деформации фазовых переходов. При этом показывается, что использование условий для собственных деформаций, свободных от напряжений, позволяет найти искомые поля напряжений и полных деформаций в диске без непосредственного решения соответствующей краевой задачи. Данный результат может быть использован при решении сложных задач, в которых исследуются системы с неупругими деформациями.

Ключевые слова: собственная деформация, условия совместности деформаций, эффект памяти формы, задача Ламе.

V. A. Lokhov, V. S. Tuktamyshev

INVESTIGATION OF STRESS-FREE CONDITIONS IN THE SYSTEMS WITH INTRINSIC DEFORMATION

Abstract. The authors investigate the conditions for the intrinsic (inelastic strain) deformation without causing mechanical stress. In the framework of elasticity theory problem, zero stress occurs when intrinsic deformation is compatible and appropriate displacement vanishes at the immovable supports. Obtained conditions are adapted for determination of the stress-strain state in the plane isotropic disk made of shape memory alloy. In this problem phase transition strain is considered as intrinsic deformation. It is shown that usage of conditions for stress-free intrinsic deformation allows to find stress and strain distributions in the disk without total solution of appropriate boundary value problem. This result can be successfully used for solution of more complicated problems for the systems with inelastic deformation.

Key words: intrinsic deformation, compatibility conditions, shape memory effect, Lamé problem.

Введение

Термин «собственные деформации» как неупругие деформации, соответствующие остаточным напряжениям, был введен Х. Рейсснером в 1931 г. [1]. В 1991 г. Т. Мура [2] предложил обобщение данного термина, принятое в современной научной литературе. В рамках геометрически линейной теории собственные деформации – это неупругие деформации любой природы (температурные, пьезоэлектрические, фазовые и др.). На основе сделанного

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31404_мол_а).

обобщения, развиваемый в работах [3–8] подход к исследованию вопросов управления напряжениями и деформациями в системах с собственными деформациями предлагает новые методики для изучения закономерностей между распределением различных видов собственных деформаций в упругом теле и его НДС. Одним из важнейших аспектов этого подхода является исследование двух понятий: 1) собственной деформации, свободной от напряжений (т.е. не вызывающей напряжений в рассматриваемой системе); 2) собственной деформации, свободной от полных деформаций (не влияющей на деформированное состояние системы). Для каждого из этих понятий определены соответствующие условия [4, 5].

В представленной работе известные условия отсутствия напряжений в системах с собственными деформациями используются при исследовании свойств распределения деформаций фазовых переходов (фазовых деформаций), возникающих в нагруженном поверхностными силами диске. В качестве определяющих соотношений, описывающих фазовые деформации, выбраны уравнения модели А. А. Мовчана [9].

1. Дифференциальная постановка краевой задачи с собственными деформациями

Рассмотрим тело, которое занимает ограниченную область V трехмерного евклидова пространства. Границу (которая считается достаточно гладкой) обозначим через Γ , замыкание области – $\bar{V}$. Краевая задача формулируется согласно следующим уравнениям. Уравнения статического равновесия в области:

$$\nabla \cdot \sigma + Q = 0, \quad x \in V, \quad (1)$$

где σ – симметричный тензор напряжений; Q – вектор объемных сил. Здесь и далее величины σ , ϵ (тензор малых деформаций) и u (вектор перемещений) будут рассматриваться как функции пространственных декартовых координат, обозначаемых радиус-вектором $x \in \bar{V}$. Отсчет напряжений ведется от естественного (ненапряженного и недеформированного) состояния.

Деформации считаются малыми и аддитивными, т.е. тензор малой деформации ϵ является суммой упругой ϵ^e и собственной ϵ^* деформаций:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^*, \quad x \in \bar{V}. \quad (2)$$

При этом собственные деформации ϵ^* можно найти отдельно, используя соответствующие определяющие соотношения. Например, для температурной деформации $\epsilon^* = \alpha \Delta T$ (α – тензор коэффициентов температурного расширения, ΔT – изменение температуры, отсчитываемое от некоторого состояния, в котором $\sigma = 0$, $\epsilon = 0$, $u = 0$) и т.д. Поэтому в рамках данной постановки ϵ^* считается известной величиной.

Закон Гука:

$$\sigma = C \cdot \epsilon^e, \quad x \in \bar{V}, \quad (3)$$

где C – тензор упругих модулей.

Геометрические соотношения Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения.

Предполагается, что граница области Γ делится на две взаимно непесекающиеся части: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$. На части границы Γ_u заданы нулевые кинематические граничные условия, на части Γ_σ задан вектор напряжений $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

Кинематические граничные условия предполагаются такими, что движение тела как жесткого целого невозможно.

Таким образом, совместное решение уравнений (1)–(5) позволяет определить напряжения $\boldsymbol{\sigma}$, деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ и перемещения $\mathbf{u}$ системы.

2. Собственные деформации, свободные от напряжений

Пусть собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ распределена таким образом, что не вызывает напряжений в теле, тогда краевая задача (1)–(5) с учетом отсутствия объемных и поверхностных сил принимает вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 0, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_u. \end{cases}$$

В результате полная деформация равна собственной деформации.

В работе [4] показано, что собственная деформация является свободной от напряжений, когда ее компоненты удовлетворяют условиям совместности деформаций, а соответствующие ей перемещения обращаются в нуль на границе Γ_u .

Совместность собственных деформаций, не влияющих на напряжения, можно проиллюстрировать на простом примере. Предположим, что в начальном состоянии ненагруженное тело мысленно разделено на некоторые элементы. Если эти элементы подвергнуть воздействию независимых между собой собственных деформаций (например, температурных), то из деформированных таким образом частей без дополнительных напряжений невозможно составить сплошное тело (рис. 1).

Таким образом, напряжения в собранном из таких элементов теле будут отсутствовать, если налагаемые собственные деформации совместны (рис. 2).

Условия совместности деформаций выражаются уравнениями совместности (дифференциальными зависимостями Сен-Венана) [10]:

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{ik,jk} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Для отсутствия напряжений в закрепленном теле (при наличии границы Γ_u), свободном от нагрузок, условие совместности собственных деформаций является недостаточным.

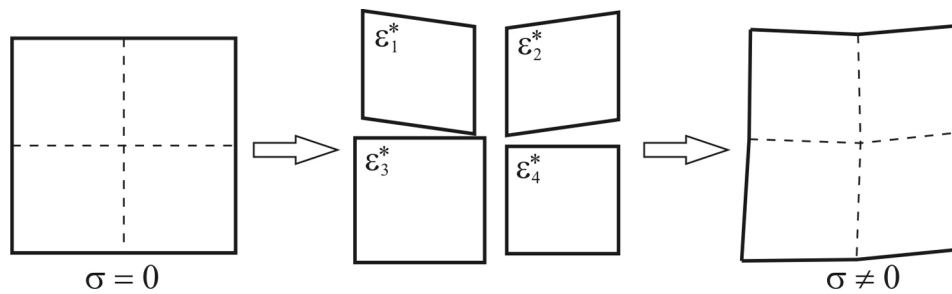


Рис. 1. Компоновка элементов с несовместными собственными деформациями

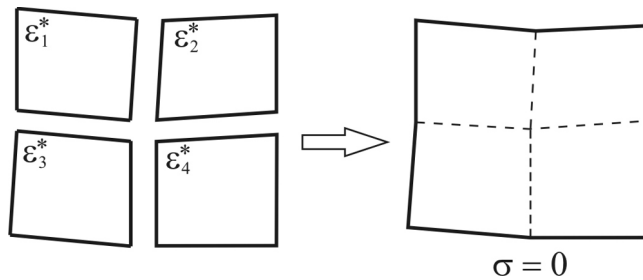


Рис. 2. Компоновка элементов с совместными собственными деформациями

Рассмотрим систему, представляющую собой однородный стержень, жестко заделанный по краям (рис. 3).

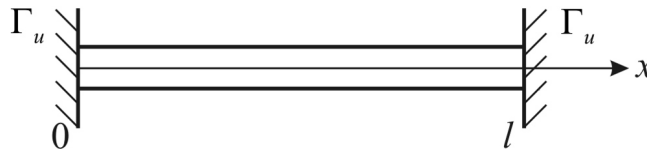


Рис. 3. Жестко закрепленный по краям стержень

Создадим в стержне собственную деформацию, представляющую собой температурную деформацию ϵ^T , которая соответствует однородному нагреву системы и удовлетворяет условиям совместности. Найдём перемещения, вызванные этим нагревом:

$$u^T(x) = \epsilon^T x + C_1.$$

На границе Γ_u :

$$x=0: C_1=0, \quad x=l: u^T = \epsilon^T l.$$

Неравное нулю перемещение u^T на правой опоре свидетельствует о том, что закрепление препятствует температурному деформированию стержня. Следовательно, при таком нагреве в системе появятся напряжения.

Таким образом, выполнение условий совместности для собственной деформации, свободной от напряжений, должно быть дополнено условием равенства нулю на опорах перемещений, соответствующих данной собственной деформации.

3. Демонстрационный пример

Рассмотрим плоский изотропный упругий диск, выполненный из материала с эффектом памяти формы (ЭПФ). К внешнему и внутреннему контурам диска, находящегося в аустенитном состоянии, прикладывается нагрузка (рис. 4), после чего диск равномерно охлаждается до температуры окончания мартенситного перехода. Во время охлаждения в диске реализуются деформации фазовых переходов ϵ^* . Задача исследования НДС такой системы может рассматриваться как простейшая модель сосудистого стента, изготовленного из материала с ЭПФ.

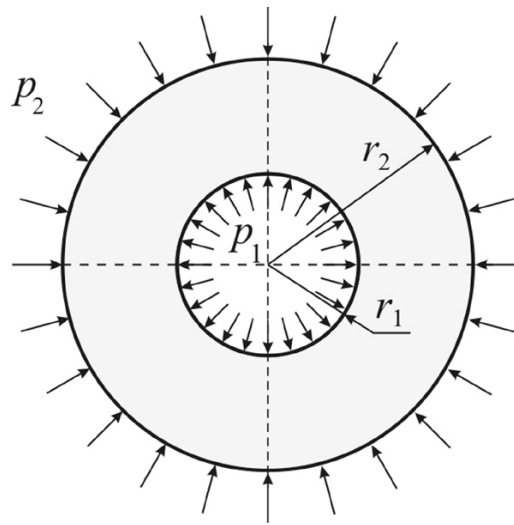


Рис. 4. Нагруженный диск

Одной из характеристик фазового перехода является объемная доля мартенсита q ($0 \leq q \leq 1$) [9]: для чистого аустенита $q = 0$, для чистого мартенсита $q = 1$. При охлаждении диска в нем происходит фазовый переход, диаграмма которого показана на рис. 5. Температуры M_s и M_f определяют начало и конец мартенситного перехода и зависят от действующего напряжения. Отметим, что при обратном нагревании произойдет аустенитный переход и накопленная фазовая деформация полностью восстановится. Температуры M_s и M_f зависят от действующих напряжений, в данной задаче этот эффект считается малым, и предполагается, что фазовый переход происходит одновременно во всем диске.

В представленном примере собственная деформация ϵ^* , а значит, и полные деформации с напряжениями зависят от двух параметров: пространственной координаты r и объемной доли мартенсита q .

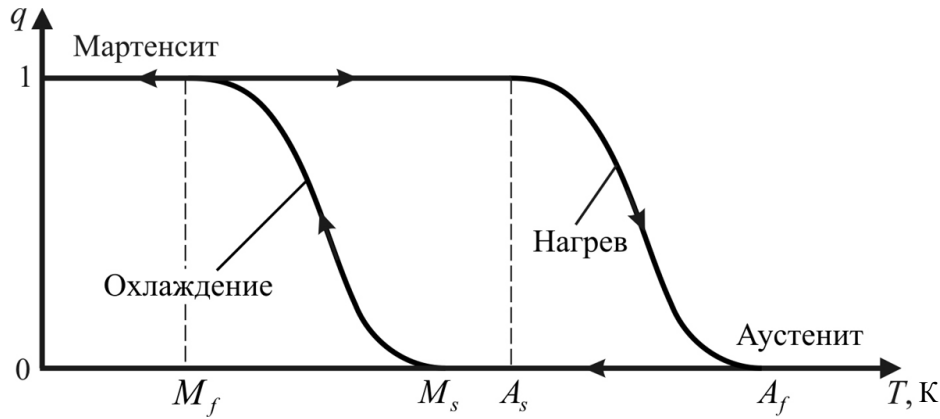


Рис. 5. Кинетика мартенситного перехода

В полярных координатах постановка задачи содержит следующие уравнения.

Уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (7)$$

Выражение для полных деформаций (2), записанное с использованием закона Гука (3):

$$\epsilon_r = \frac{1}{E(q)}(\sigma_r - \nu(q)\sigma_\theta) + \epsilon_r^*, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E(q)}(\sigma_\theta - \nu(q)\sigma_r) + \epsilon_\theta^*, \quad (8)$$

где $E(q)$ и $\nu(q)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно:

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_m} + \frac{1-q}{E_a}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_m} + \frac{1-q}{G_a}, \quad \nu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1, \quad (9)$$

здесь E_m , E_a , G_m и G_a – соответствующие упругие характеристики для мартенситного и аустенитного состояний [9]. Эти четыре параметра должны быть определены экспериментально.

Соотношения Коши:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}. \quad (10)$$

Граничные условия:

$$\sigma_r(r=r_1) = -p_1, \quad \sigma_r(r=r_2) = -p_2. \quad (11)$$

Определяющие соотношения модели А. А. Мовчана для прямого мартенситного перехода [9]:

$$\partial \epsilon_r^* = (c_0 s_r + a_0 \epsilon_r^*) \partial q, \quad \partial \epsilon_\theta^* = (c_0 s_\theta + a_0 \epsilon_\theta^*) \partial q \quad \text{при } \partial q > 0, \quad (12)$$

где символ s обозначает девиатор тензора напряжений; c_0 , a_0 – константы материала, определяемые экспериментально; $\partial \epsilon_r^*$ и $\partial \epsilon_\theta^*$ – изменения соб-

ственной деформации в данной точке рассматриваемой области, вызванные изменением объемной доли мартенсита ∂q .

Найдем напряжения, вызванные поверхностным давлением до начала охлаждения ($q = 0$), что представляет собой решение задачи Ламе [10]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 - r_2^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (r_1^2 - r^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}, \\ \sigma_\theta &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 + r_2^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} - p_2 \frac{r_2^2 (r_1^2 + r^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}.\end{aligned}\quad (13)$$

Компоненты девиатора тензора напряжений также удовлетворяют уравнению равновесия (1) и имеют вид

$$\begin{aligned}s_r &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 - 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (r_1^2 - 3r^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)}, \\ s_\theta &= p_1 \frac{r_1^2 (r^2 + 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} - p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 + r^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)}.\end{aligned}\quad (14)$$

Для дальнейшего решения задачи о фазовом переходе необходимо интегрировать соотношения (12) по параметру q . Это представляет собой весьма сложную проблему, так как возникающая фазовая деформация влияет, вообще говоря, на напряжения, и уравнения (7)–(12) становятся связанными. Но если фазовая деформация является свободной от напряжений, т.е. не изменяет напряжений в диске, то соотношения (12) можно интегрировать по q , считая напряжения постоянными.

Проверим условия для собственной деформации свободной от напряжений. Уравнение совместности главных деформаций для рассматриваемого случая [11]

$$\varepsilon_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_\theta) = 0, \quad (15)$$

можно записать в приращениях компонент тензора собственной деформации по переменной q :

$$\partial \varepsilon_r^* - \frac{\partial}{\partial r}(r\partial \varepsilon_\theta^*) = 0. \quad (16)$$

Для $\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = 0$ (при $q = 0$) согласно (12), (14) получаем

$$\partial \varepsilon_r^* = c_0 s_r \partial q = c_0 \left(p_1 \frac{r_1^2 (r^2 - 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 - r^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \right) \partial q, \quad (17)$$

$$\partial \varepsilon_{\theta}^* = c_0 s_{\theta} \partial q = c_0 \left(p_1 \frac{r_1^2 (r^2 + 3r_2^2)}{3r^2 (r_2^2 - r_1^2)} + p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 + r^2)}{3r^2 (r_1^2 - r_2^2)} \right) \partial q. \quad (18)$$

Подстановка соотношений (17), (18) в (16) показывает тождественность деформаций $\partial \varepsilon_r^*$ и $\partial \varepsilon_{\theta}^*$ в рамках уравнения совместности.

Поскольку граница $\Gamma_u = \emptyset$ для поставленной задачи, то выполнение необходимых условий доказывает, что собственные деформации (17), (18) являются свободными от напряжений.

При следующем приращении $\partial_1 q$ соотношения (12) дают

$$\partial_1 \varepsilon_r^* = (c_0 s_r + a_0 \partial \varepsilon_r^*) \partial_1 q,$$

$$\partial_1 \varepsilon_{\theta}^* = (c_0 s_r + a_0 \partial \varepsilon_{\theta}^*) \partial_1 q,$$

что также удовлетворяет условию для собственной деформации, свободной от напряжений, так как напряжения s_r и s_{θ} не изменились после первого шага ∂q , а деформации $\partial \varepsilon_r^*$ и $\partial \varepsilon_{\theta}^*$ после первого шага свободны от напряжений.

Следовательно, зная напряжения (13), можно найти фазовую деформацию, возникающую при мартенситном переходе, интегрируя уравнения (12):

$$\int_0^{\varepsilon_r^*} \frac{\partial \varepsilon_r^*}{c_0 s_r + a_0 \varepsilon_r^*} = 1, \quad \int_0^{\varepsilon_{\theta}^*} \frac{\partial \varepsilon_{\theta}^*}{c_0 s_r + a_0 \varepsilon_{\theta}^*} = 1.$$

Результат интегрирования:

$$\varepsilon_r^* = \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1) s_r, \quad \varepsilon_{\theta}^* = \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1) s_{\theta}. \quad (19)$$

Полные деформации вычисляются согласно уравнениям (8), (13), (19), где упругие характеристики берутся для мартенситного состояния. Выражения для полных деформаций достаточно громоздкие, поэтому здесь не приводятся.

Таким образом, поставленная задача решена, и все уравнения краевой задачи выполнены.

После снятия поверхностной нагрузки диск, находясь в охлажденном состоянии, сохранит накопленную фазовую деформацию (19).

Поле перемещений, соответствующее (19), будет следующим:

$$u_r^* = \varepsilon_{\theta}^* r = \frac{c_0}{a_0} (e^{a_0} - 1) \left(p_1 \frac{r_1^2 (r^2 + 3r_2^2)}{3r (r_2^2 - r_1^2)} - p_2 \frac{r_2^2 (3r_1^2 + r^2)}{3r (r_2^2 - r_1^2)} \right).$$

Пример показывает, что использование свойств собственных деформаций позволяет избежать связанности определяющих уравнений краевой задачи. В дальнейшем эта задача будет использована для моделирования системы кровеносный сосуд – стент.

Заключение

Определение напряженно-деформированного состояния систем с неупругими деформациями зачастую представляет сложную проблему. В свою очередь знание общих свойств собственных деформаций может привести к существенному упрощению решения подобных задач.

В данной работе приведены условия отсутствия напряжений в телах, имеющих собственные деформации. Показано, что использование этих условий позволяет избежать связанности математических соотношений краевой задачи определения НДС в нагруженном диске, выполненном из материала с эффектом памяти формы.

Список литературы

1. **Reissner, H.** Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen / H. Reissner // ZAMM. – Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – Vol. 11. – P. 1-8.
2. **Mura, T.** Micromechanics of Defects in Solids / T. Mura. – 2nd ed. – Kluwer, Dordrecht, 1991. – 601 p.
3. **Поздеев, А. А.** Остаточные напряжения: теория и приложения / А. А. Поздеев, Ю. И. Няшин, П. В. Трусов. – М. : Наука, 1982. – 111 с.
4. **Nyashin, Y.** Biological stresses in living tissues. The modeling and control problems / Y. Nyashin, V. Kiryukhin // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6, № 3. – P. 13–31.
5. **Nyashin, Y.** Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain / Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler // ZAMM – Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85, № 8. – P. 557–570.
6. **Туктамышев, В. С.** Независимое управление напряжениями и деформациями в растущих живых тканях / В. С. Туктамышев, В. А. Лохов, Ю. И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 2. – С. 69–76.
7. **Лохов, В. А.** Биомеханическое моделирование эффекта сближения фрагментов твердого неба при ортопедическом лечении / В. А. Лохов, О. Ю. Долганова, Ю. И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 38–45.
8. **Лохов, В. А.** Алгоритм поиска оптимальных усилий для лечения двусторонней расщелины твердого неба / В. А. Лохов, О. Ю. Долганова // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 3. – С. 42–56.
9. **Мовчан, А. А.** Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 6. – С. 47–53.
10. **Демидов, С. П.** Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высшая школа, 1979. – 432 с.
11. **Ziegler, F.** Mechanics of solids and fluids / F. Ziegler. – Second Edition. – Vienna : Springer, 1998. – 845 p.

References

1. Reissner, H. ZAMM. – Z. Angew. Math. Mech. 1931, vol. 11, pp. 1-8.
2. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. 2nd ed. Kluwer, Dordrecht, 1991, 601 p.
3. Pozdeev A. A., Nyashin Yu. I., Trusov P. V. *Ostatochnye napryazheniya: teoriya i prilozheniya* [Residual stress: theory and application]. Moscow: Nauka, 1982, 111 p.
4. Nyashin Y., Kiryukhin V. *Russian Journal of Biomechanics*. 2002, vol. 6, no. 3, pp. 13–31.
5. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005, vol. 85, no. 8, pp. 557–570.

6. Tuktamyshev V. S., Lokhov V. A., Nyashin Yu. I. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2011, vol. 15, no. 2, pp. 69–76.
7. Lokhov V. A., Dolganova O. Yu., Nyashin Yu. I. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2012, vol. 16, no. 1, pp. 38–45.
8. Lokhov V. A., Dolganova O. Yu. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2012, vol. 16, no. 3, pp. 42–56.
9. Movchan A. A. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and machines reliability]. 1994, no. 6, pp. 47–53.
10. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 432 p.
11. Ziegler F. *Mechanics of solids and fluids. Second Edition*. Vienna: Springer, 1998, 845 p.

Лохов Валерий Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра теоретической
механики, Пермский национальный
исследовательский политехнический
университет (Пермь,
пр. Комсомольский, 29а)

E-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru

Lokhov Valeriy Aleksandrovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of theoretical mechanics,
Perm National Research Polytechnic
University (Perm, 29a Komsomolsky
avenue)

Туктамышев Вадим Саитзянович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра теоретической
механики, Пермский национальный
исследовательский политехнический
университет (Пермь,
пр. Комсомольский, 29а)

E-mail: helpinvader@list.ru

Tuktamyshev Vadim Saitzyanovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of theoretical mechanics,
Perm National Research Polytechnic
University (Perm, 29a Komsomolsky
avenue)

УДК 539.37

Лохов, В. А.

Исследование условий отсутствия механических напряжений в системах с собственными деформациями / В. А. Лохов, В. С. Туктамышев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 198–207.